UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBSTOJ MAJHNIH J-HOLOMORFNIH DISKOV

Uroš Kuzman

Delo je pripravljeno v skladu s Pravilnikom o podeljevanju Prešernovih nagrad študentom, pod mentorstvom prof. dr. Franca Forstneriča.

LJUBLJANA, 2008

Povzetek

V prvem poglavju se bomo spoznali z diferencialnimi formami, ki bodo v nadaljevanju dela služile kot tehnični pripomoček. Nato si bomo v drugem poglavju ogledali kvazikonformne preslikave, nato pa še dva integralska operatorja, s katerima bomo reševali Beltramijevo enačbo, kvazikonformne preslikave karakterizira. V tretjem poglavju vpeljemo pojem linearne kompleksne strukture, ki jo v četrtem poglavju posplošimo do skoraj kompleksnih struktur. Na prostorih $\mathbb{R}^{2n}$ s skoraj kompleksnimi strukturami bomo definirali J-holomorfne preslikave in pokazali njihov obstoj s pomočjo rešitev Beltramijeve enačbe v primeru $\mathbb{R}^2$, nato pa še obstoj majhnih J-holomorfnih diskov v prostorih $\mathbb{R}^{2n}$.

Math. Subj. Class. (MSC 2000): 30C62, 58A10, 32Q65

Ključne besede: Diferencialne forme, kvazikonformne preslikave, Beltramijeva enačba, Cauchy-Greeneov operator, skoraj kompleksne strukture, J-holomorfne preslikave

Abstract

In the first chapter we discuss definitions concerning Differential forms. Then we discuss quasiconformal mappings and two integral operators necessary to solve Beltrami equation. Third chapter is devoted to linear complex structure which we extend to almost complex structure in the fourth chapter. We define J-holomorpic mappings on spaces $\mathbb{R}^{2n}$ and prove their existence. In particular we solve the problem on $\mathbb{R}^2$, using quasiconformal mappings, but in general we only prove the existence of small J-holomorpic discs on $\mathbb{R}^{2n}$.

Math. Subj. Class. (MSC 2000): 30C62, 58A10, 32Q65

Keywords: Differential forms, quasiconformal mappings, Beltrami equation, Cauchy-Greene operator, almost complex structure, J-holomorpic mappings

Kazalo

POGLAVJE 1

Diferencialne forme

Spoznali bomo diferencialne forme, ki služijo kot tehnični pripomoček za integracijo na lokalno evklidskih prostorih. Diferencialne forme so v resnici posplošitev Riemannovega integrala, ki v svoji strukturi nosijo tudi podatek o orientaciji integrala. Takšen objekt lahko integriramo tudi na podmnogoterostih ustreznih dimenzij. Formulacije se bomo sprva lotili algebraično, nato bomo spoznali nekatere osnovne operacije in nazadnje prišli do posplošenega Stokesovega izreka, ki ga poznamo že iz analize vektorskih polj.

1. Konstrukcija tangentnega in kotangentnega prostora

Ena od idej konstrukcije tangentnega prostora je, da tangentne vektorje definiramo kot vektorje hitrosti neke poti v evklidskem prostoru. Oglejmo si nekoliko natančnejšo formulacijo.

Definicija 1. *Pot γ v prostoru $\mathbb{R}^n$ je gladka preslikava*

$$\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^n.$$

Sedaj si oglejmo ekvivalenčno relacijo na množici poti v $\mathbb{R}^n$ v smislu tangentnih prostorov.

Definicija 2. *Naj bo $p \in \mathbb{R}^n$ in naj bosta γ_1 in γ_2 poti v prostoru $\mathbb{R}^n$, za kateri velja $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Tedaj je γ_1 ekvivalentna γ_2 natanko tedaj, ko je $\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0)$. Z $[\gamma]_p$ označimo ekvivalenčni razred poti γ v točki p.*

S pomočjo teh razredov definiramo tangentni prostor.

Definicija 3. *Tangentni prostor prostora $\mathbb{R}^n$ v točki p je*

$$T_p\mathbb{R}^n = \left\{ [\gamma]_p : \ \gamma \text{ pot }, \gamma(0) = p \right\}.$$

Sedaj si bomo ogledali še nekoliko bolj algebraično konstrukcijo tangentnega prostora. Naj bo f gladka funkcija, definirana na neki okolici točke p, in γ pot skozi p. Zgoraj smo identificirali tangentne vektorje z ekvivalenčnimi razredi funkcij, zato označimo $v = [\gamma]_p$. Sedaj definirajmo

$$v(f) := \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right)(f).$$

Tako smo definirali $\mathbb{R}$-linearen operator na funkcijah, ki po definiciji odvoda zadošča Leibnitzovemu pravilu

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g).$$

V splošnem operatorje s to lastnostjo imenujemo derivacije. Z njihovo pomočjo definiramo tangentne prostore bolj zapletenih struktur, za potrebe tega dela pa bo dovolj naslednja konstrukcija.

Definicija 4. *Tangentni prostor prostora* $\mathbb{R}^n$ *v točki* p *je*

$$T_p\mathbb{R}^n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p : \ v_j \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Tako smo ekvivaletno definirali tangentni prostor kot prostor smernih odvodov funkcij. V nadaljevanju bomo opustili dosledno notacijo evaluacije v točki p, kjer to ne bo potrebno.

Naj bo sedaj $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava, podana s predpisom $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ in diferenciabilna v neki točki $p \in \mathbb{R}^n$. Tedaj poznamo njen diferencial kot linearno preslikavo $\mathrm{d}f : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Prehodna matrika diferenciala preslikave matrike glede na bazi smernih odvodov je natanko Jacobijeva matrika

$$Jf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Naj bo sedaj x_j funkcija lokalne koordinate prostora $\mathbb{R}^n$ za nek $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Poznamo torej njen diferencial $\mathrm{d}x_j$, ki pa ga lahko razumemo kot linearni funkcional, ki deluje na tangentnem prostoru $T_p\mathbb{R}^n$. Radi bi videli, da diferenciali te oblike tvorijo bazo prostora, ki je dualen tangentnemu prostoru $T_p\mathbb{R}^n$.

V nadaljevanju bomo za delovanje funkcionala φ na vektorju $v \in T_p\mathbb{R}^n$ uporabljali zapis

$$\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle .$$

Vzemimo za bazo tangentnega prostora $T_p\mathbb{R}^n$ množico vektorjev $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$. Opazimo, da za zgoraj definirane diferenciale lokalnih koordinat velja

$$\left\langle \mathrm{d}x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij},$$

kjer je δ_{ij} Kroneckerjev delta. Torej je množica $\{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$ baza prostora $(T_p\mathbb{R}^n)^* = T_p^*\mathbb{R}^n$, dualna bazi parcialnih odvodov v točki p. Elementi prostora $\omega \in T_p^*\mathbb{R}^n$ so torej oblike

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{d}x_j.$$

Imenujemo jih linearni funkcionali ali forme.

Hitro opazimo, da je diferencial poljubne funkcije g, diferenciabilne v točki p, linearna forma oblike

$$\mathrm{d}g_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(p)\mathrm{d}x_j \in T^*\mathbb{R}^n.$$

Naj bo f preslikava, definirana kot zgoraj. Videli smo, da je diferencial linearna preslikava med dvema tangentnima prostoroma, sedaj pa nas bo zanimal dual te preslikave.

Definicija 5. *Naj bo* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *preslikava, diferenciabilna v točki* $p \in \mathbb{R}^n$, $v \in T_p\mathbb{R}^n$ *in* $\omega \in T_{f(p)}^*\mathbb{R}^m$. *Kodiferencial preslikave* f *je definiran s predpisom*

$$\delta f_p : T_{f(p)}^*\mathbb{R}^m \to T_p^*\mathbb{R}^n$$

$$\langle \delta f_p(\omega), v \rangle = \langle \omega, \mathrm{d}f_p(v) \rangle .$$

Oglejmo si zapis kodiferenciala v lokalnih koordinatah. Naj bodo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koordinate prostora $\mathbb{R}^m$. Linearno formo zapišemo v obliki

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathrm{d}y_j|_{f(p)}.$$

Sedaj jo preslikamo s kodiferencialom in zaradi linearnosti dobimo

$$\begin{aligned}
\delta f_p(\omega) &= \sum_{j=1}^{m} v_j \delta f_p(\mathrm{d}y_j|_{f(p)}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} v_j \mathrm{d}\,(y_j \circ f)\,|_p \\
&= \sum_{j=1}^{m} v_j \mathrm{d}f_j|_p \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(v_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_i.
\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je matrika kodiferenciala δf_p glede na bazi $\{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$ v $T_p^*\mathbb{R}^n$ in $\{\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}y_m\}$ v $T_p^*\mathbb{R}^m$ ravno transponirana Jacobijeva matrika

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Definicija 6. *Naj bo ω diferencialna 1-forma na $\mathbb{R}^m$, razreda $\mathcal{C}^r$, in $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathcal{C}^{r+1}$. Povlek ω s preslikavo f v točki $p \in \mathbb{R}^n$ definiramo kot*

$$(f^*\omega)_p = \delta f_p(\omega_{f(p)}).$$

2. Operacije na diferencialnih formah

V prejšnjem razdelku smo se lotili strogo algebraične konstrukcije linearnih form kot kovektorjev tangentnega prostora. V tem razdelku pa bomo spoznali polje teh linearnih funkcionalov nad neko odprto podmnožico $U \subset \mathbb{R}^n$, oziroma diferencialne forme. Spoznali bomo osnovne operacije za delo z diferencialnimi formami. Pri tem bomo nekoliko opustili misel na njihovo algebraično vsebino, kot kovektorjev tangentnega prostora v vsaki točki.

Definicija 7. *Diferencialna 1-forma razreda $\mathcal{C}^r$ na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$ je izraz oblike*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \mathrm{d}x_i,$$

kjer so $a_j \in \mathcal{C}^r(U)$ za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Diferencialne forme se v praksi uporabljajo največkrat kot tehnični pripomoček pri integraciji, zato je ideja vpeljati operacijo, s katero bomo dobili forme višjega reda in upoštevali spremembo orientacije pri integriranju. Zato vpeljemo bilinearno operacijo **klinasti produkt** $\wedge$. Naj bosta $\mathrm{d}x_i$ in $\mathrm{d}x_j$, $i < j$, bazna vektorja kotangentnega prostora na $\mathbb{R}^n$. Za klinasti produkt zahtevamo, da je

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i.$$

Od koder takoj sledi

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Definicijo po bilinearnosti razširimo na klinasti produkt dveh splošnih 1-diferencialih form

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\mathrm{d}x_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\mathrm{d}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i<j}^{n}(a_i(x)\cdot b_j(x) - a_j(x)\cdot b_i(x))\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

Opazimo, da je pomembna predvsem urejenost zaporedja diferencialov, kar pri integriranju nato sovpada z orientacijo. Sedaj se je potrebno dogovoriti za urejenost pri notaciji. Definirajmo

$$I_k := \{(j_1, j_2, \ldots, j_k) :\ 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n\}$$

množico urejenih k-teric množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za $I = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in I_k$ definiramo

$$\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_k},$$

pri čemer se med elementi I_k držimo leksikografske urejenosti, sedaj lahko definiramo splošne diferencialne k-forme.

Definicija 8. *Diferencialna k-forma, $k \leq n$, razreda $\mathcal{C}^r$ na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$ je izraz oblike*

$$\omega = \sum_{I \in I_k} a_I(x)\mathrm{d}x_I,$$

kjer so $a_I \in \mathcal{C}^r(U)$ za $I \in I_k$.

Hitro opazimo, da je klinasti produkt diferencialne k-forme in diferencialne s-forme diferencialna $(k+s)$-forma. V posebnem je tako tudi pri produktu diferencialne k-forme s funkcijo

$$h(x) \cdot \sum_{I \in I_k} a_I(x)\mathrm{d}x_I := \sum_{I \in I_k} h(x) a_I(x)\mathrm{d}x_I$$

če si funkcijo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mislimo kot diferencialno 0-formo.

Oglejmo si sedaj naslednjo operacijo, in sicer operacijo diferenciacije. Za **odvod k-forme** definiramo diferencialno $k+1$-formo oblike

$$\mathrm{d}\left(\sum_{I \in I_k} a_I(x)\mathrm{d}x_I\right) := \sum_{I \in I_k} \mathrm{d}a_I(x) \wedge \mathrm{d}x_I.$$

Definicija je seveda dobra, saj lahko diferencial funkcije, ki smo ga spoznali v prejšnjem razdelku, razumemo kot diferencialno 1-formo nad točkami iz $U \subset \mathbb{R}^n$, če je le podana funkcija diferenciabilna. Naslednja trditev nam bo podala še nekaj lastnosti odvoda.

TRDITEV 1. *Naj bosta ω diferencialna k-forma in λ difenencialna m-forma, obe razreda $\mathcal{C}^1$ in definirani na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$.*

(1) *Za odvod klinastega produkta obeh form velja*

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \lambda) = \mathrm{d}\omega \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\lambda.$$

(2) *Če je ω razreda $\mathcal{C}^2$, velja*

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

DOKAZ. Pri prvi točki trditve je dovolj pokazati enakost zgolj za formi oblike $\omega = a(x)\mathrm{d}x_I$ in $\lambda = b(x)\mathrm{d}x_J$, kjer sta $I \in I_k$ in $J \in I_m$ in $a, b \in \mathcal{C}^1(U)$, saj nadaljevanje sledi iz bilinearnosti klinastega produkta. Oglejmo si torej

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(a\mathrm{d}x_I \wedge b\mathrm{d}x_J) &= \mathrm{d}(ab\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J) \\
&= b\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J + a\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J \\
&= (\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x_I) \wedge (b\mathrm{d}x_J) + (-1)^k (a\mathrm{d}x_I) \wedge (\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}x_J) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge \lambda.
\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali zgolj antikomutativnost klinastega produkta.

Podobno je za dokaz druge točke dovolj preveriti enakost za formo

$$\omega = a(x)\mathrm{d}x_I,$$

kjer $I \in I_k$ in $a \in \mathcal{C}^2(U)$. Velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \mathrm{d}(\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x_I) \\
&= \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_I\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_I \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_I.
\end{aligned}$$

Če uredimo, dobimo

$$\sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}\right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_I = 0,$$

saj je $a \in \mathcal{C}^2(U)$ in zato velja enakost mešanih odvodov. □

Sedaj se spomnimo, da lahko na diferencial poljubne funkcije $\omega = \mathrm{d}f$ pogledamo kot na diferencialno 1-formo. Funkcijo f imenujemo primitivna funkcija forme ω. Za formo ω velja $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}^2 f = 0$. Izkaže se, da je to ob manjših predpostavkah tudi zadosten pogoj za obstoj primitivne funkcije neke diferencialne 1-forme. Oglejmo si najprej primer, ko je $\omega = f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y$ diferencialna 1-forma v $\mathbb{R}^2$. Denimo, da velja

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

Pogoj $\mathrm{d}\omega = 0$ je torej ekvivalenten enakosti mešanih odvodov

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Znano je, da je na enostavno povezanem območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zgornja enakost zadosten pogoj za obstoj diferenciabilne funkcije h, za katero velja

$$\mathrm{d}h = \omega$$

oziroma $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ in $\frac{\partial h}{\partial y} = g$. V splošnem pa lahko za poljubno diferencialno k-formo iščemo diferencialno $(k-1)$-formo, katere odvod bo začetna forma. Zadostne pogoje za obstoj teh podaja naslednja lema.

Lema 1 (Poincaréjeva Lema). *Za poljubno diferencialno k-formo ω razreda $\mathcal{C}^\infty$, definirano na poljubni konveksni odprti podmnožici $U \subset \mathbb{R}^n$, za katero velja $\mathrm{d}\omega = 0$, obstaja diferencialna $k-1$-forma $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(U)$, da zanjo velja*

$$\mathrm{d}\lambda = \omega.$$

Nazadnje pa si oglejmo še koordinatni zapis operacije **povleka diferencialne forme s preslikavo** f, ki smo jo spoznali že v prejšnjem razdelku. Oglejmo si preslikavo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ razreda $\mathcal{C}^1$. Spoznali smo njen diferencial in kodiferencial, uvedimo

$$\mathrm{d}f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i,$$

ki označuje komponento razvoja diferenciala po bazi kotangentnega prostora. Spomnimo se definicije povleka v neki točki $p \in \mathbb{R}^n$ iz prejšnjega razdelka

$$(f^*\omega)_p = \delta f_p(\omega_{f(p)}),$$

kjer je δf_p transponirana Jacobijeva matrika.
Če je α diferencialna 0-forma oziroma funkcija, je povlek z f enak

$$f^*(\alpha(x)) = \alpha \circ f(x).$$

Za diferencialno 1-formo je koordinatni zapis povleka enak

$$f^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\mathrm{d}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \circ f(x)\mathrm{d}f_j.$$

Sedaj za $I = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in I_k$ definirajmo

$$\mathrm{d}f_I = \mathrm{d}f_{j_1} \wedge \mathrm{d}f_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_{j_k}.$$

Tako dobimo še zapis povleka splošne diferencialne forme

$$f^*\left(\sum_{I\in I_k} a_I(x)\mathrm{d}x_I\right) = \sum_{I\in I_k} a_I \circ f(x)\mathrm{d}f_I.$$

3. Integracija diferencialnih form

Omenili smo že, da vpeljava diferencialnih form služi predvsem integraciji, saj lahko diferencialne forme definiramo tudi na mnogoterostih in tako tam definiramo integral. Za naše potrebe bomo zgolj definirali integral diferencialnih form na evklidskih prostorih in si ogledali verzijo Stokesovega izreka za diferencialne forme.

Naj bo D omejeno območje v $\mathbb{R}^n$, tako da je mera množice ∂D enaka 0. Tedaj obstaja Riemannov integral na D. Naj bo $a \in \mathcal{C}(\overline{D})$ in

$$\omega = a(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Integral diferencialne forme ω definiramo kot

$$\int_D \omega = \int_D a(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n := \underbrace{\int\!\!\int\!\ldots\!\int_D}_{n} a(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Skupaj z integracijo nas navadno zanima tudi uvedba novih spremenljivk v integral. V prvem razdelku smo videli definicijo kodiferenciala in kasneje povleka diferencialne forme, ki ju je je podajala transponirana Jacobijeva matrika. Sedaj pa bomo to uporabili pri dokazu naslednje trditve.

Trditev 2. *Naj bosta D in D' takšni območji v $\mathbb{R}^n$, da imata ∂D in $\partial D'$ mero enako 0. Naj bo $f : \overline{D} \to \overline{D'}$ difeomorfizem razreda $\mathcal{C}^1$ neke odprte okolice $\overline{D}$ na okolico $\overline{D}'$, tako da je $\overline{D}' = f(\overline{D})$. Če f ohranja orientacijo ($Jf > 0$), potem za vsako zvezno diferencialno n-formo ω na $\overline{D'}$ velja*

$$\int_{D'} \omega = \int_D f^*\omega.$$

Če pa je $Jf < 0$, pa velja

$$\int_{D'} \omega = -\int_D f^*\omega.$$

Dokaz. Zapišimo zvezno diferencialno n-formo z $a \in \mathcal{C}(D')$

$$\omega = a(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Po definiciji integrala diferencialnih form velja

$$\int_{D'} a(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{D'} a(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Na prostor D vpeljemo lokalne koordinate $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Za Riemanov integral ob zamenjavi spremenljivk velja

$$\int_{D'} a(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n. = \int_D a(f(y))\,|Jf(y)|\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \ldots y_n.$$

Na drugi strani pa velja

$$\int_D f^*\omega = \int_D a(f(y))\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_n = \int_D a(f(y))Jf(y)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \ldots \mathrm{d}y_n.$$

S tem je trditev dokazana, saj se integrala razlikujeta zgolj za predznak. □

Ugotovili smo torej, da vselej velja

$$\int_{D'} \omega = \int_D f^*\omega,$$

če f ohranja orientacijo.

Oglejmo si sedaj še verzijo Stokesovega izreka za diferencialne forme. Najprej si oglejmo integral diferencialne m-forme ω po neki m-dimenzionalni podmnogoterosti M, vloženi v $\mathbb{R}^n$ z vložitvijo $i \in \mathcal{C}^1$. Definiramo ga kot

$$\int_{i(M)} \omega := \int_M i^*\omega,$$

pri čemer je desni integral že znan in je prehod smiselno definiran s povlekom. Sedaj se spomnimo, da ima mnogoterost koherentno orientiran rob natanko tedaj, ko je le ta orientiran z zunanjo normalo in zapišimo izrek.

Izrek 1 (Stokesov izrek). *Naj bo D omejeno območje v $\mathbb{R}^{n+1}$, tako da je ∂D razreda $\mathcal{C}^1$, orientiran koherentno in ima mero 0. Naj bo ω diferencialna n-forma razreda $\mathcal{C}^1$. Tedaj velja*

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Dokaz izreka najdemo v [**1**], mi pa si zgolj oglejmo rezultat.

Oglejmo si aplikacijo izreka za $n = 0$. V tem primeru je diferencialna 0-forma kar fukcija f, območje integracije pa krivulja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$. Velja

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)),$$

kar poznamo kot **osnovni izrek integralskega računa.** Če si aplikacijo izreka ogledamo za $n = 1$, ugotovimo naslednje. Če je

$$\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y,$$

je odvod enak

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Stokesov izrek tako postane

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y,$$

kar je znana **Greenova formula**.

POGLAVJE 2

Kvazikonformne preslikave

1. Diferenciabilne kvazikonformne preslikave

V razdelku se bomo seznanili s takoimenovanimi kvazikonformnimi preslikavami. Omenjene preslikave so naravna posplošitev konformnih preslikav. Prav tako je bilo ugotovljeno, da je za mnoge izreke, ki držijo za konformne preslikave, dovolj predpostavka o kvazikonformnosti, hkrati pa so enostavnejše za uporabo kot tehnično sredstvo. V nadaljevanju dela bomo tudi ugotovili, da prav te preslikave igrajo pomembno vlogo pri reševanju nekaterih eliptičnih diferencialnih enačb. Nenazadnje pa je moč te preslikave posplošiti tudi v več spremenljivk, konformne preslikave pa ob tem prehodu postanejo degenerirane.

Prvi je vprašanje kvazikonformnih preslikav osnoval H. Grötzsch leta 1928, ko je zastavil naslednje vprašanje. Če je R pravokotnik, ki ni kvadrat, in Q kvadrat, vemo, da ni konformne preslikave iz Q v R, ki bi preslikala oglišča v oglišča. Namesto tega iščemo preslikavo iz Q v R, ki bi bila najbližje konformnosti.

Naj bosta $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ območji in $w = f(z)$ zvezno odvedljiv homeomorfizem med njima, kjer bomo uporabili zapis $z = x + iy$, $w = u + iv$. V neki točki $z_0 \in \Omega_1$ lahko zapišemo diferenciala

$$du = u_x dx + u_y dy$$

$$dv = v_x dx + u_y dy,$$

ki ju lahko predstavimo tudi v kompleksnem zapisu

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

Geometrično predstavljata afino preslikavo iz ravnine (dx, dy) v ravnino (du, dv). Ta preslikava slika kroge s središčem v izhodišču v med seboj podobne elipse. Naša želja je izračunati razmerje med osema teh elips in njihovo smer.

V realni notaciji lahko zapišemo zvezo

$$du^2 + dv^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2.$$

Izbrali smo Riemannovo metriko, kjer so $E = u_x^2 + v_x^2$, $F = u_x u_y + v_x v_y$ in $G = u_y^2 + v_y^2$ koeficienti prve fundamentalne forme. Kvadratna korena lastnih vrednosti tako dobljene simetrične kvadratne forme sta dolžini obeh polosi elipse. Lastni vrednosti sta ravno rešitvi enačbe

$$(E-\lambda)(G-\lambda) - F^2 = \lambda^2 - \lambda(E+G) + EG - F^2 = 0,$$

torej vrednosti

$$\lambda_{1,2} = \frac{E + G \pm \sqrt{(E+G)^2 - 4(EG - F^2)}}{2}.$$

Tako lahko s koeficienti prve fundamentalne forme izrazimo razmerje med osema a in b preslikanih elips

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{E + G + \sqrt{(E-G)^2 + 4F^2}}{2\sqrt{EG - F^2}}.$$

Vendar pa hitro ugotovimo, da je kompleksna notacija veliko bolj priročna za reševanje omenjenega problema. Ker velja

$$f_z = \frac{1}{2}\left(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\right)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y + i(v_x + u_y)\right),$$

opazimo, da je Jacobijeva determinanta kompleksne preslikave f, kot preslikave med dvodimenzionalnima realnima prostoroma, podana z izrazom

$$J = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

Predpostavimo, da je v našem primeru J pozitiven (preslikava ohranja orientacijo), torej, da velja $|f_{\bar{z}}| < |f_z|$. Oglejmo si še enkrat kompleksno notacijo diferencialov preslikave f

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

Ker velja $|dz| = |d\bar{z}|$, z uporabo trikotniških neenakosti ocenimo

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)\,|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)\,|dz|.$$

Obe meji dosežemo, saj sta to ravno lastni vrednosti, katerih produkt je Jacobijeva determinanta, zato smiselno zaključimo, da je razmerje obeh dolžin polosi elips enako

$$\frac{a}{b} = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}.$$

Definicija 9. *Naj bosta $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ območji, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ in $z \in \Omega_1$.*

(1) *Dilatacija preslikave f v točki z je izraz*

$$D_f(z) = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}.$$

(2) *Maksimalna dilatacija preslikave f je enaka $K_f = \sup_{z \in \Omega_1} D_f(z)$.*
(3) *Preslikava f je kvazikonformna, če je K_f omejena.*
(4) *Preslikava f je K-kvazikonformna, če je $K_f \leq K$.*

Opomba 1. *Iz izpeljave je razvidno, da velja $D_f \geq 1$. Velja pa tudi, da je v neki točki $D_f = 1$ natanko tedaj, ko je $f_{\bar{z}} = 0$. Če je torej $D_f = 1$ v vseh točkah območja Ω_1, je preslikava konformna.*

Definicija podana zgoraj najbolje ilustrira glavno lastnost kvazikonformnih preslikav, ki je torej, da je razmerje med obema osema v vseh točkah enakomerno omejeno. Vendar pa bomo v nadaljevanju uporabljali nekoliko bolj priročno definicijo in količine.

Definicija 10. *Naj bosta $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ območji, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ in $z \in \Omega_1$.*

(1) *Kompleksna dilatacija preslikave f v točki z je izraz*

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}.$$

(2) *Mala dilatacija preslikave f v točki z je izraz $d_f(z) = |\mu_f(z)|$.*
(3) *Druga kompleksna dilatacija preslikave f v točki z je izraz*

$$\nu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}}{\overline{f_{\bar{z}}}}.$$

Opomba 2. *V poljubni točki $z \in \Omega_1$ velja zveza med dilatacijo in malo dilatacijo*

$$D_f = \frac{1+d_f}{1-d_f} \qquad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1}.$$

Zato lahko ekvivalentno definiramo k-kvazikonformne preslikave, kjer je $d_f \leq k = \frac{K-1}{K+1}$. Pogoj o omejenosti faktorja K nam da zahtevo, da je $k < 1$, preslikava pa je konformna natanko tedaj, ko je $k = 0$ v vseh točkah območja Ω_1.

Opazimo, da sta obe definiciji kvazikonformnosti vezani na predpostavko, da je f razreda $\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$. Seveda je moč omenjeno predpostavko prilagoditi in idejo kvazikonformnosti posplošiti na večje razrede funkcij. Vendar pa bo za potrebe nadaljnega dela pogoj zvezne odvedljivosti zadovoljiv. Zgoraj smo namreč ugotovili, da so k-kvazikonformne preslikave rešitve Beltramijeve enačbe

$$f_{\bar{z}} = \mu_f f_z,$$

kjer je kompleksna dilatacija μ_f enakomerno omejena z vrednostjo $k < 1$. In prav z reševanjem te enačbe so bomo ukvarjali v nadaljevanju diplomske naloge.

Pred tem pa si oglejmo še nekaj lastnosti kompozituma kvazikonformnih preslikav, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Zanima nas mala dilatacija preslikave $f \circ g$. Zaradi poenostavitve zapisa bomo uvedli novo spremenljivko $\zeta = f(z)$. Običajno verižno pravilo porodi enakosti

$$(f \circ g)_z = (g_\zeta \circ f) f_z + (g_{\bar{\zeta}} \circ f) \bar{f}_z$$

$$(f \circ g)_{\bar{z}} = (g_\zeta \circ f) f_{\bar{z}} + (g_{\bar{\zeta}} \circ f) \bar{f}_{\bar{z}}.$$

Ko rešimo sistem enačb, dobimo rešitvi

$$g_\zeta \circ f = \frac{1}{J}\big((g \circ f)_z \bar{f}_{\bar{z}} - (g \circ f)_{\bar{z}} \bar{f}_z\big)$$

$$g_{\bar{\zeta}} \circ f = \frac{1}{J}\left((g \circ f)_{\bar{z}} f_z - (g \circ f)_z f_{\bar{z}}\right),$$

kjer je J Jacobijeva determinanta. Če zgornji sistem delimo in upoštevamo, da velja $\overline{f_z} = \bar{f}_{\bar{z}}$ in $\overline{f_{\bar{z}}} = \bar{f}_z$, dobimo enakosti

$$\frac{g_\zeta}{g_{\bar{\zeta}}} \circ f = \frac{(g \circ f)_{\bar{z}} f_z - (g \circ f)_z f_{\bar{z}}}{(g \circ f)_z \bar{f}_{\bar{z}} - (g \circ f)_{\bar{z}} \bar{f}_z},$$

torej velja

$$\mu_g \circ f = \frac{f_z}{\bar{f}_{\bar{z}}} \frac{\mu_{f \circ g} - \mu_f}{1 - \overline{\mu_f} \mu_{g \circ f}}.$$

2. Integralska operatorja

V tem razdelku bomo spoznali dva integralska operatorja in nekatere njune lastnosti. Omenjena operatorja bosta predstavljala glavni tehnični pripomoček pri reševanju Beltramijeve enačbe v naslednjem poglavju in osrednjega izreka v četrtem poglavju diplomskega dela.

Prvi izmed dveh operatorjev, ki jih bomo spoznali, je regularen operator, ki deluje na kompleksnih funkcijah razreda $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$.

Definicija 11. *Naj bo funkcija $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$ za $p > 2$. Zanjo definiramo Cauchy - Greeneov operator:*

$$Ph(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} h(z) \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Opomba 3. *Cauchy - Greeneov operator je v resnici normalizirana konvolucija funkcij h in $\frac{1}{z}$.*

$$Ph(\zeta) = \frac{1}{\pi} \left(h * \frac{1}{z} \right)(\zeta) - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{h(z)}{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

V naslednjih lemah bomo pokazali lastnosti operatorja, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju dela.

Definicija 12. *Naj bo $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica. Funkcija $f : U \to \mathbb{C}$ je Hölderjevo zvezna z eksponentom α, če obstaja konstanta C, da za vsak par $x, y \in U$ velja*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \, |x - y|^{\alpha} .$$

Lema 2. *Za $h \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 2$, je funkcija Ph Hölderjevo zvezna z eksponentom $1 - \frac{2}{p}$.*

Dokaz. Naj bo q konjugirani eksponent k p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tedaj zaradi predpostavke $p > 2$ zanj velja $1 < q < 2$. Naj bo $\zeta \neq 0$,

$$\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z} = \frac{\zeta}{z(z-\zeta)} \in L^q(\mathbb{C}),$$

saj je integral funkcije $|z(z-\zeta)|^{-q}$ konvergenten v okolici 0, ζ in ∞. Konvergenco v obeh polih dobimo iz dejstva, da je $q < 2$, kar je zadosten pogoj za obstoj integrala v dvodimenzionalnem prostoru $\mathbb{C}$. V neskončnosti pa je dovolj predpostavka $q > 1$, saj je tu obnašanje integrala reda $|z|^{-2q} \sim r^{-2q+1}$. Torej lahko uporabimo Hölderjevo neenakost

$$\begin{aligned} |Ph(\zeta)| &= \left| \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} h(z) \frac{\zeta}{z(z-\zeta)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \frac{|\zeta|}{\pi} \|h\|_p \left\| \frac{1}{z(z-\zeta)} \right\|_q . \end{aligned}$$

S preprosto zamenjavo spremenljivk $z = w\zeta$ dobimo

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{z(z-\zeta)}\right\|_q &= \left(\iint_{\mathbb{C}} |z(z-\zeta)|^{-q}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\iint_{\mathbb{C}} |\zeta|^{-2q+2}\,|w(w-1)|^{-q}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\zeta|^{\frac{2}{q}-2}\left\|\frac{1}{w(w-1)}\right\|_q,\end{aligned}$$

pri čemer je norma funkcije $\frac{1}{w(w-1)}$ konstanta, odvisna le od q oziroma p. Torej velja ocena

$$\begin{aligned}|Ph(\zeta)| &\leq \frac{1}{\pi}\left\|\frac{1}{w(w-1)}\right\|_q \|h\|_p\,|\zeta|^{\frac{2}{q}-1} \\ &= C_p\,\|h\|_p\,|\zeta|^{1-\frac{2}{p}},\end{aligned}$$

ki je izpolnjena tudi v primeru $\zeta = 0$. Sedaj definirajmo funkcijo $h_1(z) = h(z+\zeta_1)$. Zanjo velja

$$\begin{aligned}Ph_1(\zeta_2-\zeta_1) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} h(z+\zeta_1)\left(\frac{1}{z+\zeta_1-\zeta_2}-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} h(z)\left(\frac{1}{z-\zeta_2}-\frac{1}{z-\zeta_1}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= Ph(\zeta_2)-Ph(\zeta_1).\end{aligned}$$

Torej velja

$$\begin{aligned}|Ph(\zeta_2)-Ph(\zeta_1)| &\leq C_p\,\|h_1\|_p\,|\zeta_2-\zeta_1|^{1-\frac{2}{p}} \\ &= C_p\,\|h\|_p\,|\zeta_2-\zeta_1|^{1-\frac{2}{p}}.\end{aligned}$$

□

Drugi izmed operatorjev, ki ju bomo potrebovali v nadaljevanju dela, je singularen opreator, ki ga porodi odvajanje Cauchy-Greeneovega operatorja. Za gladko funkcijo h s kompaktnim nosilcem definiramo Beurlingov operator kot

$$Th(\zeta) = (Ph(\zeta))_\zeta.$$

Formalno je operator torej podan z

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

a takoj opazimo, da gre za integral, ki absolutno divergira (pol druge stopnje). Zato potrebujemo za dobro definiranost operatorja nekoliko natančnejšo definicijo.

Definicija 13. *Za funkcijo $h \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{C})$ definiramo Beurlingov operator*

$$Th(\zeta) = \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\iint_{|z-\zeta|>\epsilon} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}dxdy.$$

LEMA 3. *Za poljubno funkcijo $h \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{C})$ velja*

$$(Ph)_{\bar{\zeta}} = h$$

$$(Ph)_{\zeta} = Th.$$

DOKAZ. Za začetek si oglejmo preprosto zamenjavo koordinat $z \to z + \zeta$

$$\begin{aligned} Ph(\zeta) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{h(z)}{z-\zeta} - \frac{h(z)}{z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + konst. \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h(z+\zeta)}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + konst. \end{aligned}$$

Sedaj na izraz $\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$ lahko pogledamo kot na nesingularno mero in ker ima funkcija h kompakten nosilec, lahko odvod nesemo pod integral in dobimo

$$\begin{aligned} (Ph)_{\bar{\zeta}} &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h_{\bar{\zeta}}(z+\zeta)}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h_{\bar{z}}(z+\zeta)}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h_{\bar{z}}(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Če sklep ponovimo, pa dobimo enakost

$$(Ph)_{\zeta} = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{h_z(z)}{z-\zeta}dxdy.$$

Naj bo sedaj $\mathbb{D}_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta| < \epsilon\}$ in $\mathbb{C}_\epsilon = \mathbb{C} - \mathbb{D}_\epsilon$. Uporabimo dejstvo, da velja

$$\mathrm{d}\left(\frac{h(z)\mathrm{d}z}{z-\zeta}\right) = \frac{h_{\bar{z}}(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z.$$

Z uporabo Stokesovega izreka dobimo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}_\epsilon} \frac{h_{\bar{z}}(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}_\epsilon} \frac{h_{\bar{z}}(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}_\epsilon} \mathrm{d}\left(\frac{h(z)\mathrm{d}z}{z-\zeta}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon} \frac{h(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon} \frac{h(z)-h(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon} \frac{h(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Ker je funkcija h razreda $\mathcal{C}^1$, velja

$$\left|\frac{h(z)-h(\zeta)}{z-\zeta}\right| = \left|\frac{h_z(\zeta)(z-\zeta) + h_{\bar{z}}(\zeta)\overline{(z-\zeta)} + O(|z-\zeta|)}{z-\zeta}\right| \sim O(1).$$

Torej velja

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}\frac{h(z)-h(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}z\right| \sim O(\epsilon) \overset{\epsilon\to 0}{\to} 0.$$

Drugi integral pa je po Cauchyjevi integracijski formuli enak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}\frac{h(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}z = h(\zeta)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}\frac{1}{z-\zeta}\mathrm{d}z = h(\zeta).$$

Tako je dokazan prvi del leme.

Na drugi strani pa velja

$$\mathrm{d}\left(\frac{h(z)\mathrm{d}\bar{z}}{z-\zeta}\right) = \left(\frac{h_z(z)}{z-\zeta} - \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}.$$

Spet uporabimo Stokesov izrek in dobimo

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}_\epsilon}\frac{h_z(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}_\epsilon}\mathrm{d}\left(\frac{h(z)\mathrm{d}\bar{z}}{z-\zeta}\right) + \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}\frac{h(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}\bar{z} - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}_\epsilon}\frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

V limiti velja

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}_\epsilon}\frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\epsilon\to 0}{\to} Th(\zeta),$$

zato je dovolj pokazati, da je prvi integral ničeln, ko gre $\epsilon\to 0$. Če zopet napravimo razcep

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}\frac{h(z)-h(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\bar{z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}\frac{h(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\bar{z},$$

po analognem razmisleku kot zgoraj vidimo, da je prvi integral v limiti enak 0. Tako nam ostane zgolj drugi integral, ki rešimo z vpeljavo nove spremenljivke $z=\zeta+\epsilon e^{i\theta}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}\frac{h(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\bar{z} = -\frac{h(\zeta)}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\epsilon\, e^{i\theta}}{\epsilon\, e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta = -\frac{h(\zeta)}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

□

Lema 4. *Za funkcije $h\in\mathcal{C}_0^2(\mathbb{C})$ je Beurlingov operator dobro definiran in je $Th\in\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$, ter velja*

$$\|Th\|_2 = \|h\|_2\,.$$

Dokaz. Iz dokaza leme 3 je razvidno

$$Ph_{\bar{z}}(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{h_z(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{h_z(z)}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = h(\zeta)-h(0)$$

$$Ph_z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{h_{\bar{z}}(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{h_{\bar{z}}(z)}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = Th(\zeta)-Th(0)$$

Če je $h\in\mathcal{C}_0^2$ lahko uporabimo lemo 3 za funkcijo h_z in velja

$$(Th)_{\bar{\zeta}} = (Ph_z + Th(0))_{\bar{\zeta}} = (Ph_z)_{\bar{\zeta}} = h_z$$

$$(Th)_{\zeta} = (Ph_z + Th(0))_{\zeta} = (Ph_z)_{\zeta} = Th_z = Ph_{zz} + Th_z(0).$$

Ker je $h\in\mathcal{C}^2(\mathbb{C})$, je torej $(Th)_{\bar{\zeta}}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$. Analogno je $h_{zz}\in\mathcal{C}(\mathbb{C})$, operator P pa to lastnost ohrani po lemi 2 in tako velja $(Th)_\zeta\in\mathcal{C}(\mathbb{C})$. Zaključimo torej, da je $Th \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$. Podobno lahko iz rezultatov prejšnje leme zaključimo, da je $Ph \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C})$.

Opazimo, da za h s kompaktnim nosilcem velja $Ph \sim O(1)$ in $Th \sim O(|\zeta|^{-2})$, ko $\zeta \to \infty$, saj

$$Ph(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{supp\, h} \frac{\zeta\, h(z)}{z(z-\zeta)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\zeta\to\infty}{\to} O(1)$$

$$|\zeta|^2\, Th(\zeta) = -\frac{|\zeta|^2}{\pi}\iint_{supp\, h} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\zeta\to\infty}{\to} O(1).$$

Naj bo sedaj D disk s središčem v izhodišču in radijem R, dovolj velikim, da velja $supp\, h \subset D$. Oglejmo si sedaj normo

$$\|Th\|_2^2 = \iint_D |Th|^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ker velja $\overline{f_z} = \bar{f}_{\bar{z}}$ in

$$\mathrm{d}\left((Ph)(\overline{Ph})_{\bar\zeta}\mathrm{d}\bar\zeta\right) = (Ph)_\zeta(\overline{Ph})_{\bar\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta + (Ph)(\overline{Ph})_{\bar\zeta\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta,$$

lahko zgornji izraz s pomočjo leme 3 preoblikujemo v

$$\begin{aligned}\|Th\|_2 &= -\frac{1}{2i}\iint_D (Ph)_\zeta(\overline{Ph})_{\bar\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta \\ &= -\frac{1}{2i}\iint_D \mathrm{d}\left((Ph)(\overline{Ph})_{\bar\zeta}\mathrm{d}\bar\zeta\right) + \frac{1}{2i}\iint_D (Ph)(\overline{Ph})_{\bar\zeta\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta.\end{aligned}$$

Na prvem integralu uporabimo Stokesov izrek in oceni, da na robu diska velja $Ph \sim 1$ in $Th \sim \frac{1}{R^2}$. Tako ocenimo

$$\left|\frac{1}{2i}\iint_D \mathrm{d}\left((Ph)(\overline{Ph})_{\bar\zeta}\mathrm{d}\bar\zeta\right)\right| = \left|\frac{1}{2i}\int_{\partial D}(Ph)(\overline{Ph})_{\bar\zeta}\mathrm{d}\bar\zeta\right| \sim \int_{\partial D}\frac{1}{R^2} \sim \frac{1}{R}.$$

Ker je $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C})$, po lemi 3 velja

$$\frac{1}{2i}\iint_D (Ph)(\overline{Ph})_{\bar\zeta\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta = \frac{1}{2i}\iint_D (Ph)\bar{h}_\zeta\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta.$$

Zaključek bomo spet naredili s pomočjo Stokesovega izreka, zato si oglejmo

$$\mathrm{d}\left((Ph)\bar{h}\mathrm{d}\zeta\right) = -(Ph)_{\bar\zeta}\bar{h}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta - (Ph)\bar{h}_{\bar\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta.$$

Velja torej

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\iint_D (Ph)\bar{h}_\zeta\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta &= -\frac{1}{2i}\iint_D \mathrm{d}((Ph)\bar{h}\mathrm{d}\zeta) - \frac{1}{2i}\iint_D (Th)_{\bar\zeta}\bar{h}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta \\ &= -\frac{1}{2i}\int_{\partial D}(Ph)\bar{h}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2i}\iint_D |h|^2\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar\zeta\end{aligned}$$

Ker je $supp\, h \subset D$, je prvi integral enak 0, drugi pa je enak kar $\|h\|^2$. Če sedaj v posameznih korakih pošljemo $R \to \infty$, smo s tem dokazali željeno enakost. □

Ker je razred $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{C})$ gost v $\mathcal{L}^2(\mathbb{C})$, lahko s pomočjo te leme operator T smiselno zvezno razširimo na funkcije razreda $L^2(\mathbb{C})$. Vseeno pa želimo operrator T razširiti na prostore $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$. Ključ do tega rezultata je naslednja lema.

LEMA 5 (Zygmund-Calderónova lema). *Naj bo $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$. Tedaj zanjo velja ocena*

$$\|Th\|_p \leq C_p \|h\|_p ,$$

za vse $p > 2$, in je C_p konstanta odvisna le od p, ter zanjo velja $C_p \to 1$, ko $p \to 2$.

Dokaz leme najdemo v [**6**], mi pa si sedaj oglejmo še posplošene odvode v prostorih $\mathcal{L}^p$.

DEFINICIJA 14. *Naj bo funkcija h lokalno integrabilna na območju Ω. Tedaj sta funkciji h_z in $h_{\bar{z}}$ odvoda h v smislu distribucij, če sta lokalno integrabilni in zadoščata enakostima*

$$\iint_\Omega h_z \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\Omega h\varphi_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_\Omega h_{\bar{z}} \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\Omega h\varphi_{\bar{z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

za vse gladke funkcije φ s kompaktnim nosilcem.

V nadaljevanju bomo potrebovali distribucijske odvode funkcij, preslikanih s Cauchy-Greeneovim operatorjem, ki jih podaja naslednja lema.

LEMA 6. *Naj bo $h \in L^p(\mathbb{C})$ in $p > 2$. Potem veljata enakosti*

$$(Ph)_{\bar{\zeta}} = h$$

$$(Ph)_\zeta = Th$$

v smislu distribucij.

DOKAZ. Po lemi 3 enakosti veljata (celo v smislu funkcij) za vse funkcije h razreda $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{C})$. Naj bo sedaj h funkcija razreda $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$. Obstaja zaporedje funkcij $h_n \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{C})$ za katero velja $\|h_n - h\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, , saj je $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{C})$ gost podprostor prostora $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$. Po Zygmund - Calderónovi lemi zanj velja

$$\|Th_n - Th\|_p \leq C_p \|h_n - h\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Od tod sledi

$$\iint_\mathbb{C} h_n \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \iint_\mathbb{C} h\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_\mathbb{C} (Th_n)\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \iint_\mathbb{C} (Th)\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ker pa so funkcije $h_n \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$, po lemi 2 lahko zaključimo

$$\iint_\mathbb{C} h_n \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\mathbb{C} (Ph_n)\varphi_{\bar{\zeta}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\iint_\mathbb{C} (Ph)\varphi_{\bar{\zeta}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_\mathbb{C} h_n \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\mathbb{C} (Ph_n)\varphi_\zeta \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\iint_\mathbb{C} (Ph)\varphi_\zeta \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\square$

3. Reševanje Beltramijeve enačbe

V prvem poglavju tega dela smo spoznali Beltramijevo enačbo, ki karakterizira kvazikonformne preslikave. V tem razdelku bomo nanjo pogledali kot na diferencialno enačbo ter analizirali njene rešitve. Oglejmo si najprej nehomogeno Beltramijevo enačbo

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z + \sigma,$$

kjer je μ kompleksna funkcija za katero velja $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Zaradi lastnosti obeh operatorjev, ki smo ju spoznali v prejšnjem razdelku, bomo enačbo reševali pri predpostavki, da je $p > 2$ in velja $kC_p < 1$, kjer je C_p konstanta iz Zygmund-Calderónove leme, ki omejuje Beurlingov operator. Ta zahteva je zaradi lastnosti $C_p \stackrel{p \to 2}{\to} 1$ dobro pogojena. Najprej spoznajmo prostor, na katerem bomo poiskali rešitve nehomogene Beltramijeve enačbe.

Definicija 15. *Naj bo $\mathcal{B}_p$ Banachov prostor funkcij f, za katere velja:*
(1) *Funkcija f je Hölderjevo zvezna z eksponentom $1 - \frac{2}{p}$ na $\mathbb{C}$.*
(2) $f(0) = 0$.
(3) *Obstajata distribucijska odvoda f_z in $f_{\bar{z}}$, ter sta razreda $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$.*

Norma na prostoru $\mathcal{B}_p$ je definirana s predpisom

$$\|f\|_{\mathcal{B}_p} = \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{1-\frac{p}{2}}} + \|f_z\|_p + \|f_{\bar{z}}\|_p \,.$$

Preden se lotimo dokaza obstoja rešitev Beltramijeve enačbe zapišimo še lemo, ki jo bomo potrebovali v dokazu.

Lema 7. *Naj za $f : D \to \mathbb{C}$ velja $f_{\bar{z}} = 0$ na D, v smislu distribucij. Tedaj je f holomorfna na D.*

Lema je posledica bolj znane Weylove leme, dokaz zanjo najdemo v knjigi [**4**].

Izrek 2. *Naj bo $\sigma \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$, tedaj ima enačba*

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z + \sigma$$

enolično rešitev $f^{\mu,\sigma} \in \mathcal{B}^p$. To je hkrati edina rešitev nehomogene Beltramijeve enačbe, ki zadošča pogojema $f(0) = 0$ in $f_z \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$.

Dokaz. Začnimo z dokazom enoličnosti. Pokažimo, da je edina rešitev homogene enačbe

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z,$$

ki zadošča predpostavkam $f(0) = 0$ in $f_z \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$, trivialna rešitev $f \equiv 0$. Za tako rešitev homogene enačbe zaradi omejenosti μ velja, da je tudi $f_{\bar{z}} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$. Torej lahko definiramo funkcijo

$$F = f - P f_{\bar{z}},$$

kjer je P Cauchy-Greeneov operator. Po lemi 6 iz prejšnjega razdelka da je

$$F_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} - (P(f_{\bar{z}}))_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} - f_{\bar{z}} = 0,$$

v smislu distribucij. Zato je funkcija F po lemi 7 holomorfna. Oglejmo si še odvod

$$F_z = f_z - (P f_{\bar{z}})_z = f_z - T f_z = f_z - T(\mu f_z).$$

Po Zygmund - Calderónovi lemi zato velja ocena

$$\|F'\|_p \leq \|f_z\|_p + C_p \|\mu\| \|f_z\|_p \leq (1 + kC_p) \|f_z\|_p \,.$$

Torej je $\|F'\|_p < \infty$, kar pomeni, da mora biti $F' = 0$ in F konstantna. Sedaj se spomnimo, da velja $f(0) = 0$ in je operator P normaliziran, kar pomeni, da je $(Pf_{\bar{z}})(0) = 0$. Velja torej $F(0) = 0$, od koder zaključimo, da je F konstantno enaka 0. Torej nam enakost $f = Pf_{\bar{z}}$ zgornjo neenačbo preoblikuje v

$$\|f_z\|_p \leq kC_p \|f_z\|_p ,$$

kar pa je zaradi predpostavke $kC_p < 1$ izpolnjeno le pri $f_z \equiv 0$. Torej imamo konstantno funkcijo f, ki zaradi pogoja $f(0) = 0$ zavzame konstantno vrednost 0. Ugotovili smo torej, da ima nehomogena enačba največ eno rešitev, saj je homogeni del trivialen.

Sedaj si oglejmo dokaz obstoja rešitve naše enačbe. Operator $h \to T(\mu h)$ je linearen in ima na prostoru $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$ normo omejeno z $kC_p < 1$. Zatorej je obrnljiv operator $h \to h - T(\mu h)$. Ker je $\sigma \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$ je po Zygmund-Calderónovi lemi tudi $T\sigma$ element istega prostora. Torej obstaja $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$, rešitev enačbe

$$h - T(\mu h) = T\sigma.$$

Za rešitev Beltramijeve enačbe definirajmo

$$f^{\mu,\sigma} = P(\mu h + \sigma).$$

Najprej je razvidno, da je funkcija $\mu h + \sigma$ razreda $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$, kar nam zagotavlja omejenost μ. Torej je $P(\mu h + \sigma)$ po lemi 2 dobro definirana in zvezna funkcija, saj je $p > 2$. Za njene odvode velja

$$(f^{\mu,\sigma})_{\bar{z}} = (P(\mu h + \sigma))_{\bar{z}} = \mu h + \sigma$$

$$(f^{\mu,\sigma})_z = (P(\mu h + \sigma))_z = T(\mu h + \sigma) = h.$$

Pri tem smo uporabili lemo 6 o odvodih operatorja P iz prejšnjega razdelka in dejstvo, da je h rešitev zgornje enačbe. Iz obeh relacij je razvidno, da f zadošča nehomogeni Beltramijevi enačbi, opazimo pa tudi, da sta oba odvoda razreda $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$. Iz konstrukcije je po Zygmund - Calderónovi lemi razvidno

$$\|h\|_p = \|T(\mu h) + T\sigma\|_p \leq kC_p \|h\|_p + C_p \|\sigma\|_p ,$$

od koder zaključimo, da je

$$\|h\|_p \leq \frac{C_p}{1 - kC_p} \|\sigma\|_p .$$

Sedaj uporabimo še lemo 2 o Hölderjevi zveznosti operatorja P in dobimo

$$\begin{aligned}
|f^{\mu,\sigma}(z_1) - f^{\mu,\sigma}(z_2)| &\leq |P(\mu h - \sigma)(z_1) - P(\mu h - \sigma)(z_2)| \\
&\leq C\,|\mu h(z_1) - \mu h(z_2) + \sigma(z_1) - \sigma(z_2)|^{1-\frac{2}{p}} \\
&\leq C\left(\|\mu\|\,\|h\|_p + \|\sigma\|_p\right)^{1-\frac{2}{p}} |z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}} \\
&\leq C\left(\|\sigma\|_p\left(1 + \frac{C_p}{1 - kC_p}\right)\right)^{1-\frac{2}{p}} |z_1 - z_2|^{1-\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

kar potrdi, da je rešitev $f^{\mu,\sigma}$ Hölderjevo zvezna z eksponentom $1 - \frac{2}{p}$. Ker velja še $f^{\mu,\sigma}(0) = 0$, je definirana funkcija res rešitev nehomogene Beltramijeve enačbe iz prostora $\mathcal{B}_p$. □

Pokazali smo obstoj rešitve nehomogene enačbe na dokaj splošnem razredu funkcij. S tem rezultatom si bomo pomagali pri reševanju homogene Beltramijeve enačbe, ki je povezana s kvazikonformnimi preslikavami, ki smo jih obravnavali v prvem razdelku. Enačbo želimo rešiti v splošnem, vendar bomo za začetek privzeli, da ima μ kompakten nosilec.

IZREK 3. *Naj bo μ merljiva kompleksna funkcija s kompaktnim nosilcem za katero velja, da je $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Potem obstaja f^μ, enolična rešitev enačbe*

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z,$$

za katero velja $f^\mu(0) = 0$ in $f_z^\mu - 1 \in L^p(\mathbb{C})$.

DOKAZ. Definirajmo funkcijo

$$f^\mu = z + f^{\mu,\mu},$$

kjer je $f^{\mu,\mu}$ rešitev nehomogene Beltramijeve enačbe z nehomogenim delom enakim μ. Taka rešitev po izreku 2 obstaja in je enolična, saj ima μ kompakten nosilec in je enakomerno omejen, torej razreda $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$. Funkcija f^μ je rešitev homogene Beltramijeve enačbe, saj velja

$$(f^\mu)_{\bar{z}} = (z + f^{\mu,\mu})_{\bar{z}} = (f^{\mu,\mu})_{\bar{z}} = \mu(f^{\mu,\mu})_z + \mu = \mu(f^{\mu,\mu} + z)_z = \mu f_z^\mu.$$

Ker rešitev izpolnjuje tudi pogoja

$$(f^\mu)_z - 1 = (f^{\mu,\mu})_z \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$$

in $f^\mu(0) = 0$, je po izreku 2 taka rešitev enolična. $\square$

OPOMBA 4. *Funkcijo f^μ definirano s predpisom*

$$f^\mu = P(\mu(h+1)) + z,$$

kjer je h rešitev enačbe

$$h = T(\mu h) + T\mu,$$

imenujemo normalna rešitev Beltramijeve enačbe.

Ugotovili smo torej, da obstaja normalna rešitev Beltramijeve enačbe. V nadaljevanju bomo vzpostavili zvezo med odvedljivostjo funkcije μ in odvedljivostjo rešitve f^μ. Za izpeljavo zveze bomo potrebovali naslednjo lemo.

LEMA 8. *Naj bosta funkciji p in q zvezni na enostavno povezanem območju $\Omega \subset \mathbb{C}$ in naj obstajata njuna odvoda v smislu distribucij, za katera velja $p_{\bar{z}} = q_z$. Tedaj obstaja funkcija $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, za katero velja $f_z = p$ in $f_{\bar{z}} = q$.*

Znova gre za nekoliko bolj posplošeno obliko Weylove leme, dokaz pa najdemo v knjigi [**2**].

IZREK 4. *Naj bo μ merljiva kompleksna funkcija s kompaktnim nosilcem, za katero velja, da je $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Če obstaja njen distribucijski odvod μ_z in je $\mu_z \in \mathcal{L}^p(\mathbb{C})$, potem je normalna rešitev Beltramijeve enačbe f^μ homeomorfizem razreda $\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$.*

DOKAZ. Želimo torej določiti λ, da bo veljalo

$$f_z = \lambda$$

$$f_{\bar{z}} = \mu\lambda.$$

V skladu z lemo 8 mora veljati

$$\lambda_{\bar{z}} = (\mu\lambda)_z = \lambda_z\mu + \lambda\mu_z.$$

Nekoliko preoblikujmo to enakost:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} &= \mu_z + \mu\frac{\lambda_z}{\lambda}\\ (\log\lambda)_{\bar{z}} &= \mu_z + \mu(\log\lambda)_z.\end{aligned}$$

Enačbo tega tipa smo reševali v izreku 2, tako najdemo ustrezen $\lambda = e^\sigma$, kjer je $\sigma = f^{\mu,\mu_z}$.

S konstrukcijo primernega λ smo pokazali, da je rešitev $f^\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$. Oglejmo si še njeno Jacobijevo determinanto

$$|f^\mu_z|^2 - |f^\mu_{\bar{z}}|^2 = (1-|\mu|^2)e^{2\sigma}.$$

Očitno je strogo pozitivna, kar pomeni, da je lokalno obrnljiva na celem $\mathbb{C}$. Po konstrukciji velja, da ob predpostavki $z \to \infty$ velja $f^\mu(z) \to \infty$, oglejmo pa si tudi lokalno obnašanje funkcije v okolici točke ∞. Ker ima μ kompakten nosilec velja $\mu(h+1) \in \mathcal{L}^p$ in po lemi 2 velja $P(\mu(h+1)) \sim O(|z|^{1-\frac{2}{p}})$. Torej je $f^\mu \sim z + O(|z|^{1-\frac{2}{p}})$. Uvedimo nove koordinate $z = \frac{1}{\zeta}$ in si oglejmo obrat funkcije f^μ v okolici 0 :

$$\frac{1}{f^\mu\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \sim \frac{1}{\frac{1}{\zeta} + O\left(\left|\frac{1}{\zeta}\right|^{1-\frac{2}{p}}\right)} = \frac{\zeta}{1+O(|\zeta|^{\frac{2}{p}})}.$$

Razvidno je, da je f^μ lokalno obrnljiva tudi v okolici ∞. Torej je f^μ lokalni homeomorfizem med dvema sferama, oziroma tudi krovna preslikava. Ker slika v mnogoterost istega roda (spet na sfero), je stopnja preslikave enaka 1, torej je homeomorfizem. □

Pokazali smo torej, da ob predpostavki, da obstaja posplošeni odvod funkcije μ, najdemo rešitve Beltramijeve enačbe razreda $\mathcal{C}^1(\mathbb{C})$, ki ustrezajo diferenciabilnim kvazikonformnim preslikavam iz prvega razdelka tega poglavja. Izkaže se, da bi se lahko otresli tudi te predpostavke in za funkcijo μ zahtevali, da je zgolj merljiva, a bi tedaj za rešitve dobili nekoliko posplošeno obliko kvazikonformnih preslikav, ki se jim bomo na ta način izognili. Vseeno pa se želimo otresti predpostavke, da ima μ kompakten nosilec.

Izrek 5. *Naj bo μ merljiva kompleksna funkcija za katero velja, da je $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Tedaj obstaja enoličen kvazikonformni homeomorfizem w^μ ravnine nase s kompleksno dilatacijo μ in fiksnimi točkami $0, 1,$ in ∞.*

Dokaz. Če ima funckija μ kompakten nosilec, je po prejšnjem izreku iskana preslikava kar

$$w^\mu = \frac{f^\mu(z)}{f^\mu(1)}.$$

Predpostavimo sedaj, da je $\mu = 0$ v okolici izhodišča. Tedaj ima funkcija

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{z^2}{\bar{z}^2}\mu\left(\frac{1}{z}\right)$$

kompakten nosilec. Torej obstaja rešitev $f^{\tilde{\mu}}$ pripadajoče Beltramijeve enačbe. Če definiramo funkcijo

$$w^{\mu}(z) = \frac{1}{f^{\tilde{\mu}}\left(\frac{1}{z}\right)},$$

za njene odvode velja

$$\begin{aligned}(w^{\mu})_z &= \frac{1}{z^2 f^{\tilde{\mu}}\left(\frac{1}{z}\right)^2} f^{\mu}_z\left(\frac{1}{z}\right)\\(w^{\mu})_{\bar{z}} &= \frac{1}{\bar{z}^2 f^{\tilde{\mu}}\left(\frac{1}{z}\right)^2} f^{\mu}_{\bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

Če sedaj naredimo premenjavo koordinat $z \to \frac{1}{\zeta}$, izrazimo odvoda $f^{\tilde{\mu}}$ in ju vstavimo v pripadajočo Beltramijevo enačbo z dilatacijo $\tilde{\mu}$, dobimo enakost

$$(w^{\mu})_{\bar{z}} = \mu\,(w^{\mu})_z\,.$$

Torej imamo rešitev, ko je μ neničelna le na okolici točke ∞.

Nazadnje si oglejmo še splošno funckijo μ. Zapišemo $\mu = \mu_1 + \mu_2$, kjer ima μ_1 kompakten nosilec, μ_2 pa je enaka 0 v okolici izhodišča. Iščemo funkcijo λ, za katero bo veljalo $f^{\lambda} \circ f^{\mu_2} = f^{\mu}$ oziroma $f^{\lambda} = f^{\mu} \circ (f^{\mu_2})^{-1}$. Če upoštevamo rezultate iz prvega razdelka tega poglavja, mora za dilatacijo funkcije f^{λ} veljati

$$\lambda = \frac{f^{\mu_2}_z}{\overline{f^{\mu_2}}_{\bar{z}}}\frac{\mu - \mu_2}{1 - \overline{\mu_2}\mu} = \frac{f^{\mu_2}_z}{\overline{f^{\mu_2}}_{\bar{z}}}\frac{\mu_1}{1 - \overline{\mu_2}\mu}.$$

Funkcija λ ima kompakten nosilec, saj je taka tudi funkcija μ_1. Tako smo dobili rešitev za splošen μ kot kompozitum dveh preslikav. $\square$

POGLAVJE 3

Kompleksifikacija vektorskega prostora

1. Linearna kompleksna struktura

Za vektorske prostore iste dimenzije vemo, da so homeomorfni v topološkem smislu. V tem razdelku pa se bomo nadalje ukvarjali s strukturo, ki nam bo podala smiseln prehod iz realnega vektorskega prostora sode dimenzije v primeren kompleksen vektorski prostor. Najprej si ta problem oglejmo na najpreprostejšem primeru, ko je realni vektorski prostor enak kar $\mathbb{R}^2$. Takrat je prehod v kompleksno ravnino $\mathbb{C}$ dobro poznan kot množenje s številom $i = \sqrt{-1}$. Tako dobimo identifikacijo ravnine $\mathbb{C}$ s parom realnih števil in preslikavo

$$\varphi : (x, y) \to x + iy.$$

Naj bo linearna preslikava $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ podana z matričnim zapisom v standardni bazi

$$j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\cdot i} & \mathbb{C} \end{array}$$

Sedaj želimo to idejo posplošiti na realne vektorske prostore sode dimenzije, zato pa bomo potrebovali primerno linearno preslikavo.

Definicija 16. *Naj bo V realen vektorski prostor. Kompleksna struktura na V je linearen endomorfizem $J \in End_{\mathbb{R}}(V)$ z lastnostjo $J^2 = -Id$.*

Direktna posledica definicije je, da mora biti realen vektorski prostor, na katerem definiramo kompleksno strukturo, sode dimenzije.

Trditev 3. *Edini lastni vrednosti kompleksne strukture J sta števili i in $-i$.*

Dokaz. Naj bo (λ, v) poljuben lastni par preslikave J. Zanj velja

$$Jv = \lambda v.$$

Nadalje velja enakost

$$-v = J^2 v = \lambda J v = \lambda^2 v,$$

kar nam pove, da sta možni lastni vrednosti zgolj omenjeni števili. □

Z uvedbo kompleksne strukure J tako dobimo bijektivno korespondenco med realnimi vektorskimi prostori sode dimenzije in kompleksnimi vektorskimi prostori. Denimo, da imamo kompleksno strukturo J na realnem vektorskem prostoru V,

$$(a + ib) \cdot v \to a \cdot v + b \cdot Jv,$$

iz realnega dobimo kompleksen vektorski prostor V. Obratno, če že poznamo množenje vektorja s kompleksnim številom, definiramo

$$Jv := i \cdot v$$

in s tem dobimo kompleksno strukturo na V. Če je sedaj $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza V nad $\mathbb{C}$, je $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2 \ldots, e_n, Je_n\}$ baza V nad $\mathbb{R}$.

TRDITEV 4. *Poljubni dve kompleksni strukturi sta konjugirani. To pomeni, da za poljubni kompleksni strukturi J in J', definirani na vektorskem prostoru V sode dimenzije, obstaja $A \in End_{\mathbb{R}}$, za katerega velja*

$$J' = AJA^{-1}.$$

DOKAZ. Naj bo $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2, \ldots, e_n, Je_n\}$ baza realnega vektorskega prostora V, porojena z J, in $\{e'_1, J'e'_1, e'_2, J'e'_2, \ldots, e'_n, J'e'_n\}$ baza istega prostora, porojena z J'. Definiramo $A \in End_{\mathbb{R}}V$ s predpisom

$$Ae_j = e'_j,\ A(Je_j) = J'e'_j.$$

Tedaj velja

$$AJA^{-1}e'_j = AJe_j = J'e'_j$$
$$AJA^{-1}J'e'_j = AJ^2e_j = -Ae_j = -e'_j = J'(J'e'_j).$$

Torej velja

$$AJA^{-1} = J'.$$

□

Imejmo sedaj par (V, J), kjer je V realen vektorski prostor dimenzije $2n$ in J kompleksna struktura na V. Definirajmo kompleksifikacijo V

$$V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{v + iw; v, w \in V\}.$$

Realna dimenzija novega prostora je $4n$, operator J pa lahko smiselno razširimo na novi prostor s predpisom

$$J(v + iw) = Jv + iJw.$$

TRDITEV 5. *Naj bo V realen vektorski prostor, dimenzije $2n$, in J kompleksna struktura definirana na V. Tedaj velja*

$$V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)},$$

kjer je $V^{(1,0)}$ lastni podprostor operatorja J za lastno vrednost i in $V^{(0,1)}$ lastni podprostor operatorja J za lastno vrednost $-i$.

DOKAZ. Naj bo $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2, \ldots, e_n, Je_n\}$ realna baza V, tedaj je to kompleksna baza prostora $V^{\mathbb{C}}$. Definirajmo vektorje

$$e'_j := \frac{1}{2}(e_j - iJe_j)$$

$$\bar{e}'_j = \frac{1}{2}(e_j + iJe_j),$$

za $j = 1, 2, \ldots, n$. Velja

$$Je'_j = ie'_j$$
$$J\bar{e}'_j = -i\bar{e}'_j,$$

za $j = 1, 2, \ldots, n$. To so torej bazni vektorji obeh podprostorov $V^{(1,0)}$ in $V^{(0,1)}$. Velja pa tudi

$$\begin{aligned} e_j &= e'_j + \bar{e}'_j \\ Je_j &= i(e'_j + \bar{e}'_j), \end{aligned}$$

za $j = 1, 2, \ldots, n$. S tem je trditev dokazana, saj lahko vsak element prostora $V^{\mathbb{C}}$ zapišemo kot direktno vsoto dveh elementov iz željenih prostorov. □

Opomba 5. *Prostor V lahko na naraven način vložimo v $V^{\mathbb{C}}$ kot realni del $V^{\mathbb{C}}$. Vektor*

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j + b_j J e_j, \ a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

lahko v kompleksnem zapišemo kot

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e'_j + \bar{\alpha_j}\bar{e'_j} = 2Re\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e'_j\right),$$

pri čemer je $\alpha_j = a_j + ib_j$, za $j = 1, 2, \ldots, n$. Opazimo, da je $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e'_j \in V^{(1,0)}$. Torej s preslikavo $\varphi(v) = 2Re(v)$ dobimo komutativen diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{J}{\to} & V \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi \\ V^{(1,0)} & \stackrel{\cdot i}{\to} & V^{(1,0)} \end{array}.$$

Oglejmo si še dual kompleksnega vektorskega prostora.

Trditev 6. *Naj bo V^* dual realnega vektorskega prostora V, dimenzije $2n$, in $\{\theta_1, \tau_1, \theta_2, \tau_2, \ldots, \theta_n, \tau_n\}$ dualna baza V^*, ki pripada $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2, \ldots, e_n, Je_n\}$, bazi vektorskeg prostora V. Naj bo $J^* \in End_{\mathbb{R}}(V^*)$ dual preslikave J. Tedaj velja:*

(1) *Operator J^* je kompleksna struktura na realnem vektorskem prostoru V^*.*
(2) *$J^*\tau_j = \theta_j$ in $J^*\theta_j = -\tau_j$, za $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Dokaz. Dokažimo najprej drugo točko. Vemo, da za poljubna $\omega \in V^*$ in $e \in V$ po definiciji dualne preslikave velja

$$\langle \omega, Je \rangle = \langle J^*\omega, e \rangle .$$

Dovolj je, da željeni enakosti za J^* pokažemo na baznih vektorjih vektorskega prostora V:

$$\begin{aligned} \langle J^*\tau_i, e_j \rangle = \langle \tau_i, Je_j \rangle &= \delta_{ij} = \langle \theta_i, e_j \rangle \\ \langle J^*\tau_i, Je_j \rangle = \langle \tau_i, -e_j \rangle &= 0 = \langle \theta_i, Je_j \rangle \\ \langle J^*\theta_i, e_j \rangle = \langle \theta_i, Je_j \rangle &= 0 = \langle \tau_i, e_j \rangle \\ \langle J^*\theta_i, Je_j \rangle = \langle \theta_i, -e_j \rangle &= -\delta_{ij} = \langle \tau_i, Je_j \rangle . \end{aligned}$$

Pri tem smo upošetvali zgolj $J^2 = -Id$ in lastnost dualne baze.

Dokaz prve točke je sedaj preprost, saj imamo bazo dualnega prostora, za katero velja

$$\begin{aligned} J^*(J^*\theta_j) &= J^*\tau_j = -\theta_j, \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ J^*(J^*\tau_j) &= -J^*\theta_j = -\tau_j, \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} . \end{aligned}$$

Torej je $(J^*)^2 = -Id$. □

Sedaj si oglejmo še prostor $V^{*\mathbb{C}}$, ki ga kot $V^{\mathbb{C}}$ razcepimo na direktno vsoto

$$V^{*\mathbb{C}} = V^{*(1,0)} \oplus V^{*(0,1)},$$

podprostora pa generiramo z baznimi vektorji

$$\omega_k = \theta_k + i\tau_k$$

$$\bar{\omega}_k = \theta_k - i\tau_k,$$

ki so tudi lastni vektorji preslikave J^* za lastni vrednosti i in $-i$. Velja pa tudi:

$$V^{*(1,0)} = (V^{(1,0)})^*$$

$$V^{*(0,1)} = (V^{(0,1)})^*,$$

saj je

$$\left\langle \omega_k, e'_j \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \theta_k + i\tau_k, e_j - iJe_j \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\langle \theta_k, e_j \right\rangle + \left\langle \tau_k, Je_j \right\rangle \right) = \delta_{kj}$$

$$\left\langle \bar{\omega}_k, \bar{e}'_j \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \theta_k - i\tau_k, e_j + iJe_j \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\langle \theta_k, e_j \right\rangle + \left\langle \tau_k, Je_j \right\rangle \right) = \delta_{kj}.$$

2. Standardna kompleksna struktura

Oglejmo si linearno kompleksno strukturo podano z matriko

$$J_{st} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če definiramo preslikavo $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ s predpisom

$$\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n),$$

zanjo velja, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{J_{st}} & \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\cdot i} & \mathbb{C} \end{array}.$$

Oglejmo si strukturo J_{st} še na $T_p\mathbb{R}^{2n}$, za nek $p \in \mathbb{R}^{2n}$. Za bazo slednjega smiselno vzamemo

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\},$$

seveda izračunane v točki p. Tako delovanje standardne kompleksne strukture na tem prostoru opišemo s predpisom

$$J_{st}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j},\ J_{st}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

V prejšnjem razdelku smo spoznali tudi prostor $(T_p\mathbb{R}^{2n})^{\mathbb{C}} \cong (T_p\mathbb{C}^n)^{\mathbb{C}}$. Poznamo celo njegov razcep

$$(T_p\mathbb{C}^n)^{\mathbb{C}} = (T_p\mathbb{C}^n)^{(1,0)} \oplus (T_p\mathbb{C}^n)^{(0,1)}$$

in bazne vektorje obeh podprostorov

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

ki so po teoriji prejšnjega razdelka med drugim tudi lastni vektorji J_{st} za lastni vrednosti i oziroma $-i$. Opazimo pa tudi zvezo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = i\left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right).$$

Tako lahko po opombi iz prejšnjega razdelka realno kombinacijo zapišemo kot

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\frac{\partial}{\partial z_j} + \overline{\alpha}_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = 2Re\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\frac{\partial}{\partial z_j}\right),$$

kjer je $\alpha_j = a_j + ib_j$.

Znanje iz prejšnjega razdelka sedaj uporabimo še na dualnem prostoru $(T\mathbb{R}^{2n})^*$. Dualna baza zgornji bazi originalnega prostora bo seveda

$$\{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}x_n, \mathrm{d}y_n\},$$

kompleksna struktura pa je že porojena z dualom preslikave J_{st}. Tudi tokrat nas bo zanimala predvsem kompleksna različica $(T\mathbb{R}^{2n})^{*\mathbb{C}} \cong (T\mathbb{C}^n)^{*\mathbb{C}}$, katere bazo dobimo kot

$$\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + i\mathrm{d}y_j$$

$$\mathrm{d}\overline{z}_j = \mathrm{d}x_j - \mathrm{d}y_j.$$

Iz prejšnjega razdelka vemo, da je to dualna baza kompleksne različice baze tangentnega prostora, diferencial kompleksne funkcije pa lahko tako zapišemo tudi kot

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j + \frac{\partial f_j}{\partial y_j}\mathrm{d}y_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j + \frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_j}\mathrm{d}\overline{z}_j\right).$$

Izvedli smo zamenjavo realnih form $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}y$ s kompleksnimi $\mathrm{d}z$ in $\mathrm{d}\bar{z}$, poiskali kompleksno izrazitev diferenciala, zamenjali običajne baznih vektorje tangentnega prostora s kompleksnimi. Tako smo opravili celostno identifikacijo prostora $(\mathbb{R}^{2n}, J_{st})$ s prostorom $(\mathbb{C}, i)$.

POGLAVJE 4

Obstoj J-holomorfnih preslikav

1. J-holomorfne preslikave in skoraj kompleksna struktura

V prejšnjem poglavju smo se ukvarjali zgolj z linearno kompleksno strukturo J, definirano na vektorskem prostoru $V = T_p\mathbb{R}^{2n}$. V nadaljevanju pa bomo potrebovali polje takih preslikav oziroma skoraj kompleksno strukturo definirano na neki odprti podmnožici $D \subset \mathbb{R}^{2n}$.

DEFINICIJA 17. *$J \in End(T\mathbb{R}^{2n}|_D)$ imenujemo skoraj kompleksna struktura nad odprto množico $D \subset \mathbb{R}^{2n}$, če je na vsakem vlaknu linearna kompleksna struktura.*

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta. Preslikava $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ je po klasični definiciji holomorfna na D natanko tedaj, ko v vsaki točki $p \in D$ zadošča sistemu Cauchy-Riemannovih enačb:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Holomorfnost ekvivalentno podamo tudi s sistemom

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Slednja zveza nam porodi še eno obliko zadostnih pogojev za holomorfnost, izraženo z diferencialom $\mathrm{d}f$. Vemo, da je diferencial funkcije f v neki točki p linearna preslikava. Linearno preslikavo J_{st}, ki identificira množenje z i v $\mathbb{R}^2$, pa smo tudi spoznali v prejšnjem poglavju. Holomorfnost zahteva komutiranje te operacije in običajnega množenja z i v $\mathbb{C}$, torej, da je

$$\mathrm{d}f \circ J_{st} = i\,\mathrm{d}f,$$

oziroma, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} T_pD & \overset{\mathrm{d}f_p}{\to} & T_u\mathbb{C} \\ \downarrow J_{st} & & \downarrow i \\ T_pD & \overset{\mathrm{d}f_p}{\to} & T_{u(p)}\mathbb{C} \end{array}.$$

Seveda gre za ekvivalentno definicijo, saj je zgornja enakost, uporabljena na $\frac{\partial}{\partial x}$, natanko ekvivalentna oblika Cauchy-Riemannovega sistema. Podobno sedaj definiramo J-holomorfne preslikave.

DEFINICIJA 18. *Naj bo D odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^2$. Tedaj je preslikava $f : D \to \mathbb{R}^{2n}$ J-holomorfna, če zanjo velja*

$$\mathrm{d}f \circ J_{st} = J(f) \circ \mathrm{d}f,$$

v vsaki točki D, kjer je J skoraj kompleksna strukura nad $f(D)$.

2. J-holomorfne preslikave v $\mathbb{R}^2$ in Beltramijeva enačba

V tem razdelku si bomo posebej ogledali J-holomorfne preslikave v prostoru $\mathbb{R}^2$. Obstoj le-teh bomo dokazali s pomočjo Beltramijeve enačbe, katere rešitve smo poiskali v drugem poglavju.

Ugotovili smo, da J-holomorfno preslikavo $f : (\mathbb{R}^2, J_{st}) \to (\mathbb{R}^2, J)$ karakterizira enačba

$$\mathrm{d}f \circ J_{st} = J(f) \circ \mathrm{d}f,$$

mi pa si bomo ogledali preslikave v nasprotni smeri $g : (\mathbb{R}^2, J) \to (\mathbb{R}^2, J_{st}) \cong (\mathbb{C}, i)$, ki jih po analogiji karakterizira enačba

$$\mathrm{d}g \circ J = J_{st} \circ \mathrm{d}g = i\,\mathrm{d}g.$$

Najprej si oglejmo obliko skoraj kompleksne strukture v $\mathbb{R}^2$.

LEMA 9. *Naj bo J zvezna skoraj kompleksna struktura, definirana na odprti $D \subset \mathbb{R}^2$. Tedaj velja*

$$J(\frac{\partial}{\partial x}) = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{a(x,y)^2+1}{b(x,y)}\frac{\partial}{\partial x} - a(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

kjer sta $a, b : D \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji in $b \neq 0$ na D.

DOKAZ. Naj bo

$$J = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

kompleksna struktura v neki točki podmnožice D. Enakost $J^2 = -Id$ porodi sistem enačb

$$a^2 + bc = -1 = bc + d^2,\ b(a+d) = 0 = c(a+d).$$

Če je $b = 0$, hitro opazimo, da prva enačba nima realnih rešitev, zato mora veljati $a = -d$. Iz prve enačbe pa izrazimo $c = -\frac{a^2+1}{b}$. S tem smo dobili vse možne kompleksne strukture izražene s parametroma a in b, ki ju nad D nadomestimo z ustreznima zveznima funkcijama. $\square$

Če sedaj zgornjo enačbo holomorfnosti uporabimo na baznih vektorjih in izrazimo s funkcijama a in b, dobimo

$$\mathrm{d}g \circ J(\frac{\partial}{\partial x}) = a(x,y)\frac{\partial g}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial g}{\partial x} = i\frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\mathrm{d}g \circ J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{a(x,y)^2+1}{b(x,y)}\frac{\partial g}{\partial x} - a(x,y)\frac{\partial g}{\partial y} = i\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Hitro opazimo, da gre za linearno odvisni enačbi (v kompleksnem smislu), saj z množenjem druge z $-\frac{b(x,y)}{a(x,y)+i}$ dobimo prvo enačbo. Reševali bomo torej zgolj prvo enačbo. Če upoštevamo zvezi

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = i\left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right),$$

dobimo enačbo

$$g_{\bar{z}} = \frac{a(x,y) + i(b(x,y) - 1)}{-a(x,y) + i(b(x,y) + 1)} g_z.$$

Ugotovimo, da je pri $b(x,y) > 0$ enačba Beltramijeva, saj velja

$$|\mu_g| = \left| \frac{a(x,y) + i(b(x,y) - 1)}{-a(x,y) + i(b(x,y) + 1)} \right| < 1.$$

Pri $b(x,y) < 0$ pa velja

$$|\mu_g| = \left| \frac{a(x,y) + i(b(x,y) - 1)}{-a(x,y) + i(b(x,y) + 1)} \right| > 1.$$

Oglejmo si konjugirano Beltramijevo enačbo

$$\overline{g_{\bar{z}}} = \bar{g}_z = \bar{\mu}\overline{g_z} = \bar{\mu}\bar{g}_{\bar{z}}$$

$$\bar{g}_{\bar{z}} = \frac{1}{\bar{\mu}} \bar{g}_z.$$

V zgornjem primeru je torej $\bar{g}$ rešitev Beltramijeve enačbe s koeficientom $\left|\frac{1}{\bar{\mu}}\right| < 1$.

V drugem poglavju smo ugotovili, da je rešitev Beltramijeve enačbe z odvedljivim μ homeomorfizem razreda $\mathcal{C}^1$. Ker je tudi konjugiranje zgolj zrcaljenje preko realne osi, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da obstaja J-holomorfna preslikava $g : (\mathbb{R}^2, J) \to (\mathbb{R}^2, J_{st})$, ki je hkrati zvezno odvedljiva in obrnljiva, z zvezno odvedljivim inverzom, za vsako skoraj kompleksno strukturo J, ki je razreda vsaj $\mathcal{C}^1$. Če si sedaj ogledamo inverz $f = g^{-1}$, je to J-holomorfna preslikava $f : (\mathbb{R}^2, J_{st}) \to (\mathbb{R}^2, J)$.

3. Obstoj majhnih J-holomorfnih diskov

V tem razdelku si bomo ogledali J-holomorfne preslikave v splošnem prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. Globalne eksistence ne moremo zagotoviti. Dokazali pa bomo obstoj nekaterih J-holomorfnih preslikav $u : \mathbb{D} \to (\mathbb{R}^{2n}, J)$, kjer z $\mathbb{D}$ označimo enotski disk prostora $\mathbb{C}$. V nadaljevanju bomo te preslikave imenovali J-holomorfni diski. Izkaže se, da bomo za dokaz njihovega obstoja potrebovali isti integralski operator, kot smo ga že spoznali pri reševanju Beltramijeve enačbe v drugem poglavju. Pokazali bomo obstoj J-holomorfnih diskov blizu ničelnega diska. Najprej si oglejmo prostor, na katerem bomo iskali rešitve.

Definicija 19. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Naj bo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Definirajmo operator*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \ldots \partial x_{\alpha_n}}.$$

Definicija 20. *Naj bo $\mathcal{C}^{k,\alpha}(U)$ Banachov prostor funkcij $f : U \to \mathbb{R}^{2n}$, za katere velja:*

(1) *Funkcija f je razreda $\mathcal{C}^k(U)$.*
(2) *Parcialni odvodi $k-$tega reda so na U Hölderjevo zvezni z eksponentom α.*

Norma na prostorih $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ je definirana s predpisom

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} := \sup_{x,y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k} := \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)|\,,$$
$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} := \|f\|_{\mathcal{C}^k} + \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}\,.$$

Najprej bomo dokazali, da lahko poljubno skoraj kompleksno strukturo nad V lokalno vidimo kot majhno perturbacijo skoraj kompleksne strukture identično enake J_{st}, definirane nad enotsko kroglo $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{2n}$.

LEMA 10. *Naj bo J skoraj kompleksna struktura razreda $\mathcal{C}^1$ na $V \subset \mathbb{R}^{2n}$. Za vsako točko $p \in V$ in $\delta > 0$ obstajata okolica U točke p, in koordinatni difeomorfizem (lokalne koordinate) $z : U \to \mathbb{B}$, da zanj velja $z(p) = 0$, $\mathrm{d}z(p) \circ J(p) \circ \mathrm{d}z^{-1}(0) = J_{st}$, za sliko $z_*(J) := \mathrm{d}z \circ J \circ \mathrm{d}z^{-1}$ pa velja*

$$\|z_*(J) - J_{st}\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{B}})} < \delta.$$

DOKAZ. Z zgolj linearno zamenjavo koordinat lahko najdemo koordinatni difeomorfizem neke okolice p na $\mathbb{B}$ z lastnostjo $z(p) = 0$ in $\mathrm{d}z(p) \circ J(p) \circ \mathrm{d}z^{-1}(0) = J_{st}$. Za nek $\epsilon > 0$ si sedaj oglejmo preslikavo $d_\epsilon : p \longmapsto \epsilon^{-1}p$, definirano na $\mathbb{R}^{2n}$. Definirajmo nov koordinatni difeomorfizem $z_\epsilon := d_\epsilon \circ z$. Zanj najprej velja

$$z_\epsilon(p) = d_\epsilon(z(p)) = d_\epsilon(0) = 0.$$

Oglejmo si še njegove diferenciale

$$\mathrm{d}z_\epsilon(p) = \mathrm{d}(d_\epsilon \circ z)(p) = \epsilon^{-1}\mathrm{d}z(p),$$
$$\mathrm{d}z_\epsilon^{-1}(p) = \mathrm{d}(z^{-1} \circ d_\epsilon^{-1})(p) = \mathrm{d}z^{-1}(d_\epsilon^{-1}(p))\epsilon = \epsilon\mathrm{d}z^{-1}(\epsilon p).$$

Torej velja

$$\mathrm{d}z_\epsilon(p) \circ J(p) \circ \mathrm{d}z_\epsilon^{-1}(0) = \mathrm{d}z(p) \circ J(p) \circ \mathrm{d}z^{-1}(0) = J_{st}.$$

Za sliko $(z_\epsilon)_*(J)$ pa torej velja ocena

$$(z_\epsilon)_*(J)(p) = \mathrm{d}z(p) \circ J(p) \circ \mathrm{d}z^{-1}(\epsilon p) \sim J_{st} + O(\epsilon\,|p|).$$

Za dovolj majhen ϵ izberemo torej okolico $U = z_\epsilon^{-1}(\mathbb{B})$. $\square$

Sedaj si oglejmo ekvivalentno formulacijo J-holomorfnosti funkcije $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^{2n}$. Definirajmo operatorja

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - J_{st}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + J_{st}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

To sta v resnici kar operatorja $\frac{\partial}{\partial z}$ in $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ v kompleksnem, če smo napravili identifikacijo prostora $\mathbb{C}$ s prostorom $(\mathbb{R}^2, J_{st})$. Takoj opazimo tudi obratno zvezo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = J_{st}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right).$$

Sedaj v enačbo

$$\mathrm{d}u \circ J_{st} = J(u) \circ \mathrm{d}u,$$

vstavimo bazni vektor $\frac{\partial}{\partial x}$ in dobimo

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}u \circ J_{st})\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= (J(u) \circ \mathrm{d}u)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= J(u)\frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}$$

Če v isto enačbo vstavimo še bazni vektor $\frac{\partial}{\partial y}$, dobimo enačbo

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}u \circ J_{st}) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) &= (J(u) \circ \mathrm{d}u) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ -\frac{\partial u}{\partial x} &= J(u) \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

ki pa je zaradi lastnosti $J(u)^2 = -Id$ ekvivalentna prvi. Z novima operatorjema preoblikujemo prvo enačbo v

$$J_{st} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) = J(u) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$(J_{st} + J(u)) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = (J_{st} - J(u)) \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Če sedaj prepostavimo, da je operator $J(u) + J_{st}$ obrnljiv, lahko zgornjo zvezo zapišemo v obliki

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + Q_J(u) \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

kjer je $Q_J(u) = (J_{st} + J(u))^{-1}(J_{st} - J(u))$. Po lemi 10 je brez škode za splošnost $J(0) + J_{st} = 2J_{st}$ in je tako operator $J(u) + J_{st}$, ob predpostavki, da je skoraj kompleksna struktura J zvezna, obrnljiv še na neki majhni okolici ničelnega diska v prostoru $\mathcal{C}^{\alpha,k}(\overline{\mathbb{D}})$. Torej zgornja kvazilinearna parcialna diferencialna enačba opisuje J-holomorfne diske v okolici ničelnega diska oziroma, kot jih bomo imenovali v nadaljevanju, majhne J-holomorfne diske.

Pred nadaljevanjem si oglejmo še eno lastnost Cauchy-Greeneovega operatorja iz drugega poglavja.

Izrek 6. *Za poljubni števili $k \in \mathbb{N}$ in $0 < \alpha < 1$ velja, da je Cauchy-Greeneov operator P zvezna preslikava*

$$P : \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathcal{C}^{k+1,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}).$$

Dokaz izreka najdemo v [**5**]. Rezultat izreka bomo uporabili na nelinearnem operatorju

$$\Psi_J(u) = \left(Id + PQ_J \frac{\partial}{\partial z} \right) u.$$

Po zgornjem izreku gre za dobro definiran zvezen endomorfizem prostora $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ natanko tedaj, ko je skoraj kompleksna struktura J (posledično tudi operator Q_J) razreda $\mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$, saj Cauchy-Greeneov operator znova zviša red, ki se zniža zaradi odvajanja.

Za nas bo predvsem pomemben odvod tega operatorja po spremenljivki $\bar{z}$, ki je po lemi 6 enak

$$[\Psi_J(u)]_{\bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + Q_J(u) \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ugotovimo torej, da je u nek majhen J-holomorfen disk natanko tedaj, ko je preslikava $\Psi_J(u)$ holomorfna v klasičnem smislu (J_{st}-holomorfna). Radi bi videli, da gre za bijektivno korespondenco oziroma, da je operator Ψ_J obrnljiv.

Izrek 7. *Naj bosta X in Y Banachova prostora, $U \subset X$ odprta množica in $\phi : U \to Y$ zvezno odvedljiva preslikava. Naj bo $x_0 \in X$ in predpostavimo, da je odvod $D\phi(x_0) : X \to Y$ preslikave ϕ bijektiven. Potem obstaja okolica $U_0 \subset U$ točke x_0, da je zožitev preslikave ϕ na njej injektivna, množica $V_0 := \phi(U_0)$ je odprta podmnožica prostora Y, preslikava $\phi^{-1} : Y \to X$ je zvezno odvedljiva in za vse $y \in V_0$ velja $D\left(\phi^{-1}\right)(y) = \left(D\phi\left(\phi^{-1}(y)\right)\right)^{-1}$. Če je preslikava ϕ razreda $\mathcal{C}^k$ za neko naravno število k, je taka tudi preslikava ϕ^{-1}.*

Ta izrek je zgolj analog izreka o izreka o inverzni preslikavi v evklidskih prostorih, dokaz zanj najdemo v [**7**].

Za obrnljivost si moramo torej ogledati odvod operatorja Ψ_J v neki točki $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$. Oglejmo si najprej limito

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Psi_J(u+tv) - \Psi_J(u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} t^{-1} \left[(Id + PQ_J(u+tv)\frac{\partial}{\partial z})(u+tv) - (Id + PQ_J(u)\frac{\partial}{\partial z})(u) \right]$$

$$= \left(Id + PQ_J(u)\frac{\partial}{\partial z} \right) v + P\left(\lim_{t\to 0} \frac{Q_J(u+tv) - Q_J(u)}{t} \right) \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Torej je odvod operatorja Ψ_J v točki u preslikava

$$v \longmapsto \left(Id + PQ_J(u)\frac{\partial}{\partial z} \right)(v) + PS(v)\frac{\partial u}{\partial z},$$

pri čemer smo s S označili odvod Q_J. Na tem mestu potrebujemo zvezno odvedljivost skoraj kompleksne strukture J, ki porodi zveznost operatorja S. Če znova uporabimo izrek 6, opazimo, da je v tem primeru zvezen tudi odvod operatorja Ψ_J.

Označimo sedaj z $u_0 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^{2n}$ preslikavo, identično enako 0. Po lemi 10 brez škode za splošnost velja, da je $J(u_0) \equiv J_{st}$ in $Q_J(u_0) \equiv 0$. Tako je odvod operatorja Ψ_J v točki u_0 enak Id in torej bijektiven.

Po izreku o inverzni preslikavi lahko v prostoru $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$, za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, najdemo neko majhno okolico točke $\Psi_J(u_0) = u_0$ tako, da je operator Ψ_J tam obrnljiv. S tem smo dobili bijektivno korespondenco med majhnimi, običajnimi holomorfnimi diski in majhnimi J-holomorfnimi diski.

Posledica 1. *Naj bo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$ in J skoraj kompleksna struktura razreda $\mathcal{C}^{k-1,\alpha}$, definirana v okolici $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Za poljubno točko $p \in \mathbb{R}^{2n}$, ki leži dovolj blizu 0, in poljubno majhen vektor $V = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^{2n\times k}$, obstaja J-holomorfna preslikava $u_{p,V} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^{2n}$ razreda $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, za katero velja $u_{p,V}(0) = p$ in $\frac{\partial^l u_{p,V}}{\partial x^l}(0) = v_l$ za vse $1 \leq l \leq k$.*

Dokaz. Za $q \in \mathbb{R}^{2n}$ in $W = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \in \mathbb{R}^{2n\times k}$ definirajmo funkcijo

$$h_{q,W}(z) = q + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} w_l z^l.$$

Sedaj izberimo tako okolico izhodišča v prostoru $\mathbb{R}^{2n\times(k+1)}$, da bo za vsak (q, W) iz te okolice veljalo, da je $h_{q,W}$ element okolice ničelnega diska v prostoru $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$, ki je dovolj majhna, da je na njej inverz operatorja Ψ_J dobro definiran. Tako lahko vsaki funkciji $h_{q,W}$ iz te okolice priredimo majhen J-holomorfen disk

$$u_{q,W} = \Psi_J^{-1}(h_{q,W}),$$

ki je razreda $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.

Za poljubna, dovolj majhna $p \in \mathbb{R}^{2n}$ in $V = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^{2n \times k}$ želimo sedaj najti J-holomorfen disk $u_{q,W}$, za katerega bo veljalo

$$\left(u_{q,W}(0), \frac{\partial u_{q,W}}{\partial x}(0), \frac{\partial^2 u_{q,W}}{\partial x^2}(0), \ldots, \frac{\partial^k u_{q,W}}{\partial x^k}(0) \right) = (p, V)\,.$$

Z drugimi besedami, želimo najti majhno okolico izhodišča prostora $\mathbb{R}^{2n \times (k+1)}$, na kateri bo dobro definiran inverz preslikave Φ_j, ki je podana kot kompozitum naslednjih preslikav

$$(q, W) \to h_{q,W} \overset{\Psi_J^{-1}}{\to} u_{q,W} \to \left(u_{q,W}(0), \frac{\partial u_{q,W}}{\partial x}(0), \frac{\partial^2 u_{q,W}}{\partial x^2}(0), \ldots, \frac{\partial^k u_{q,W}}{\partial x^k}(0) \right).$$

Preslikava $(q, W) \to h_{q,W}$ je linearna in zvezna, njen odvod je zato enak kar njej sami. Enak zaključek lahko naredimo za preslikavo

$$u_{q,W} \to \left(u_{q,W}(0), \frac{\partial u_{q,W}}{\partial x}(0), \frac{\partial^2 u_{q,W}}{\partial x^2}(0), \ldots, \frac{\partial^k u_{q,W}}{\partial x^k}(0) \right).$$

Skupaj z zvezno odvedljivostjo preslikave Ψ_J^{-1}, ki jo dobimo po izreku o inverzni preslikavi, lahko zaključimo, da je tudi kompozitum treh preslikav zvezno odvedljiv. Njegov odvod v točki $0 \in \mathbb{R}^{2n \times (k+1)}$ pa je enak preslikavi

$$(q, W) \to h_{q,W} \to h_{q,W} \to \left(h_{q,W}(0), \frac{\partial h_{q,W}}{\partial x}(0), \frac{\partial^2 h_{q,W}}{\partial x^2}(0), \ldots, \frac{\partial^k h_{q,W}}{\partial x^k}(0) \right).$$

To je po definicji funkcije $h_{q,W}$ kar identična preslikava. Če znova uporabimo izrek o inverzni preslikavi, lahko torej najdemo majhno okolico točke $\Phi_J(0) = 0 \in \mathbb{R}^{2n \times (k+1)}$, kjer je Φ_J obrnljiv. Ta okolica se s Φ_J^{-1} preslika v okolico izhodišča v prostoru $\mathbb{R}^{2x \times (k+1)}$. Ker je točka (p, V) po predpostavki izreka dovolj blizu izhodišča, je $u_{p,V}$ iskani J-holomorfni disk. $\square$

Literatura

[1] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Singapur, tretja izdaja, 1976

[2] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, Princeton, 1966

[3] L. V. Ahlfors, L. Bers, *Riemann's Mapping Theorem for Variable Metrics*, The Annals of Mathematics, **72** (1960), 385-404

[4] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer - Verlag, New York 1981

[5] I. N. Vekua, *Generalized analitic functions*, Pergamon Press, London, 1962

[6] A. P. Calderon, A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., **88** (1952), 85-139

[7] J. Tonejc, *Lokalna karakterizacija skoraj kompleksnih struktur*, doktorska dizertacija, Ljubljana, 2007

[8] J. C. Sikorav, *Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds*, v *Holomorphic curves and symplectic geometry*, Birkhauser, (1994), 165-189

[9] S. Ivashkovich, J. P. Rosay, *Schwarz-type lemmas for solutions of $\overline{\partial}$-inequalities and complete hyperbolicity of almost complex structures*, Annales de l'institut Fourier, **54** (2004), 2387-2435

[10] K. Diederich, A. Sukhov, *Plurisubharmonic exhaustion functions and almost complex Stein structures*, arXiv:math.CV/0603417v1, 2006